مجلة جامعة سبها للعلوم البحتة والتطبيقية
Sebha University Journal of Pure & Applied Sciences

Journal homepage: http://www.sebhau.edu.ly/journal/jopas

حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية ذات المعاملات المتغيرة باستخدام تحويل تكاملي جديد

غادة اشتيوي*

قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة مصراتة، مصراتة، ليبيا.

الكلمات المفتاحية:

التحويل التكاملي الجديد.
المعادلات التفاضلية العادية الخطية.
المعاملات المتغيرة.
مسألة القيمة الابتدائية.
معكوس التحويل التكاملي الجديد..

الملخص

يهدف هذا البحث إلى تطبيق تحويل تكاملي جديد لحل المعادلات التفاضلية العادية الخطية ذات المعاملات المتغيرة، حيث يعد هذا النوع من المعادلات من النماذج الرياضية المعقدة التي تواجه العديد من التحديات في مجال الرياضيات التطبيقية. في هذا الإطار، تم اقتراح تحويل تكاملي جديد يعتمد على دالة نواة تعمل على تبسيط التعامل مع معاملات غير ثابتة. وقد تم تعريف هذا التحويل رياضيًا بالإضافة إلى تقديم الشروط اللازمة لوجوده، ثم استُعرضت خصائصه الأساسية، بما في ذلك تطبيقه على بعض الدوال الأساسية مثل كثيرات الحدود والدوال الأسية، كما تم ايضاح التحويل العكسي الذي يُمكن من استرجاع الدالة الأصلية بعد إجراء عملية التحويل، بالإضافة إلى اشتقاق قواعد تحويل المشتقات من الرتبتين الأولى والثانية، مع الإشارة إلى إمكانية تعميم هذا التحويل على مشتقات من رتب أعلى. تمت دراسة كفاءة هذا التحويل من خلال تطبيقه على مجموعة من مسائل القيمة الابتدائية للمعادلات التفاضلية، وقد أظهرت النتائج أن التحويل التكاملي الجديد يُتيح الوصول إلى حلول تحليلية دقيقة دون الحاجة إلى إجراء عمليات رياضية معقدة أو اللجوء إلى طرق عددية تقريبية. ومن خلال المقارنة بين الحلول المتحصّل عليها باستخدام هذا التحويل وتلك التي تنتج عن استخدام تحويل لابلاس، وُجد أن التحويل الجديد قد يُظهر تفوقاً في بعض الحالات من حيث الدقة والبساطة. من خلال هذه الدراسة، يتضح أن التحويل التكاملي الجديد يمكن أن يشكل أداة رياضية قوية لتحليل المعادلات ذات المعاملات المتغيرة، ويمهد الطريق أمام استخدامه في حل أنظمة المعادلات التفاضلية المعقدة والمعادلات التفاضلية الجزئية. لذا، فإن هذا التحويل يمثل مساهمة مبتكرة في التحويلات الرياضية وتطبيقاتها المستقبلية وتوسيع آفاق استخدام التحويلات التكامليّة كأدوات فعّالة في حل المعادلات التفاضلية. علاوة على ذلك، تم كتابة مجموعة من الأكواد البرمجية باستخدام برنامج MATLAB، تتيح حساب التحويل التكاملي الجديد تلقائيًا للدوال من النوع t^n f(t),t^n f^' (x),t^n f''(x)، حيث n عدد صحيح موجب. وقد ساهمت هذه الأدوات البرمجية في تسريع عملية الحل وتقليل الجهد الحسابي، مما يعزز إمكانية استخدام هذا التحويل في التطبيقات العملية والهندسية.

Solving Linear Ordinary Differential Equations with Variable Coefficients Using a New Integral Transformation

Ghada Eshtewi*

Department of Mathematics, Faculty of Science, Misurata University, Misurata, Libya.

Keywords:

The New Integral Transform.
Linear Ordinary Differential Equations.
Variable Coefficients.
Initial Value Problem.
Inverse of the New Integral Transform.

ABSTRACT

This research aims to introduce and apply a new integral transformation for solving linear ordinary differential equations with variable coefficients, such equations are considered among the most complex mathematical models, posing significant challenges in various areas of applied mathematics. In this context, a new integral transformation is proposed, based on a specially constructed kernel function that facilitates the handling of non-constant coefficients. The transformation is rigorously defined, and the necessary conditions for its existence are established.

*Corresponding author.
E-mail addresses: g.eshtewi@sci.misuratau.edu.ly

Article History : Received 08 February 25 - Received in revised form 31 May 25 - Accepted 21 June 25

Its fundamental properties are then examined, including its application to basic functions such as polynomials and exponential functions. Furthermore, the inverse transformation is derived, allowing the recovery of the original function upon completion of the transformation process. The transformation rules for first and second order derivatives are also obtained, with indication of how these rules can be generalized to derivatives of higher orders. The efficiency of this transformation is evaluated by applying it to a set of initial value problems for differential equations. The results demonstrate that the new integral transformation provides accurate analytical solutions without requiring complex mathematical manipulations or reliance on approximate numerical methods. A comparative analysis between the solutions obtained using this transformation and those derived via the Laplace transformation reveals that the proposed method may exhibit superiority in certain cases in terms of accuracy and simplicity. The findings of this study suggest that the new integral transformation can serve as a powerful mathematical tool for analyzing differential equations with variable coefficients and may pave the way for its application to more complex systems of differential equations and partial differential equations. As such, this transformation represents an innovative contribution to the field of mathematical transformations, broaden their future applications and enhancing their role as effective tools for solving differential equations. Additionally, a set of MATLAB scripts has been developed to automate the computation of the new integral transformation for functions of this form t^n f(x),t^n f^' (x),t^n f"(t), where n is a positive integer. These computational tools have significantly accelerated the solution process and reduced the computational burden, thereby reinforcing the potential of this transformation for practical and engineering applications.

1. المقدمة

تعد التحويلات التكاملية من الأدوات الهامة في الرياضيات التطبيقية، حيث تستخدم في حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية والتكاملية بطرق أكثر كفاءة مقارنة بالأساليب التقليدية الأخرى، فمنذ تقديم تحويل لابلاس في عام 1780، وتحويل فورييه في عام 1822 [4]، أصبح لهذه التحويلات دور أساسي في حل المعادلات التفاضلية التي تظهر في العديد من المجالات العلمية كالفيزياء والهندسة وعلم الفلك وغيرها من العلوم.

نتيجة لأهمية هذه الأدوات، شهد العقدان الماضيان اهتماماً متزايداً بتطوير تحويلات تكاملية جديدة وتحسين التحويلات الموجودة، فقد نشر مؤخراً العديد من الأبحاث، مثل تحويل كمال [5] وتحويلي مهند [1,14] المشتقان من تحويل فورييه، بالإضافة إلى تحويل BA الذي وضح أنه تعميم لتحويلات أخري مثل تحويل Sumudu [16] وتحويل[17] Natural ، واستخدمت هذه التحويلات لحل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية ذات العوامل الثابتة، فهي تعمل على تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة جبرية يسهل إيجاد حلها، كما قُدم تحويل محجوب [9] وتحويل Anuj [3] لحل المعادلات التفاضلية العادية الخطية ذات المعاملات المتغيرة، واستخدم تحويل Sawi [10] وتحويل Anuj [11] لحل معادلات فولتير التكاملية والتفاضلية.

علاوة على ذلك ساهم تحويل Gupta [6] في حل مسائل القيمة الابتدائية ذات المعاملات الثابتة، فيما قدم تحويل عماد وإسراء [15] وتحويل ne [7] وهما تحويلان تنائيا المعلمة نتائج جيدة في حل المعادلات التفاضلية العادية ذات العوامل الثابتة، كما تم اشتقاق تحويل تكاملي عام جديد [13] من تحويل لابلاس، واستخدم في حل المعادلات التفاضلية العادية والمعادلات التكاملية والمعادلات التفاضلية الكسرية.

تظهر كل هذه التحويلات فعاليتها في إيجاد الحلول الدقيقة، وتكمن أهميتها وفقاً لطبيعة المسألة المدروسة، وتبقى هناك حاجة إلى تحويلات تكاملية قادرة على التعامل مع فئات معينه من المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات المتغيرة، حيث نقدم في هذا البحث التحويل التكاملي الجديد وهو تعديل لبعض التحويلات التكاملية والذي يهدف إلى تبسيط حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية ذات المعاملات المتغيرة، وإيجاد حلول مسائل القيمة الابتدائية بدون الحاجة إلى إجراء عمليات حسابية كبيرة، ومقارنة النتائج المتحصل عليها مع تحويل لابلاس الكلاسيكي.

يعرف التحويل التكاملي الجديد لدوال ذات الرتبة الأسية، لتكن الدوال في المجموعة $\mathcal{Z}$ معرفة على الصورة

$$\mathcal{Z} = \left\{ f(t): \exists A, k_1, k_2 > 0, |f(t)| < Ae^{\frac{|t|}{k_i}}, if\ t \in (-1)^i \times [0,\infty) \right\}$$

حيث الثابت A عدد منتهي، و k_1, k_2 قد يكونان محدودان أو غير محدودان.

يرمز إلى التحويل التكاملي الجديد بالعامل $\mathcal{T}\{.\}$، ويعرف بالتكامل:

$$\mathcal{T}\{f(t)\} = \mathcal{P}(v) = \int_0^{\infty} f(t) e^{\frac{-t}{v^2}}\, dt, \quad t \geq 0, \ \ k_1 \leq v \leq k_2$$

حيث v هو متغير التحويل التكاملي الجديد وt متغير الدالة f [8]، فإذا كانت $f(t)$ دالة متصلة مقطعياً و $\lim_{t\to\infty} f(t) e^{\frac{-t}{v^2}}$ موجودة فإن التحويل التكاملي الجديد موجود لهذه الدالة.

كما أن اختيار دالة النواة على الصورة $e^{\frac{-t}{v^2}}$ قد يفيد بشكل أفضل مع المعاملات المتغيرة في المعادلات التفاضلية العادية، فقد يساهم في تبسيط حل المعادلة المحلولة أو يجعل حلها أكثر مباشرة بخلاف تحويل لابلاس وفقاً للمسألة المدروسة.

2. التحويل التكاملي الجديد والتحويل العكسي لبعض الدوال الأساسية:[8]

يوضح الجدولان 1 و2 تطبيق التحويل التكاملي الجديد على بعض الدوال الأساسية والتحويل العكسي لها على التوالي.

جدول 1: التحويل التكاملي الجديد لبعض الدوال الأساسية

$f(t)$	$\mathcal{T}\{f(t)\} = \mathcal{P}(v)$
1	v^2
t	v^4
t^n	$n!\, v^{2(n+1)}$
e^{at}	$\frac{v^2}{1 - av^2}$
$\sin(at)$	$\frac{av^4}{1 + a^2 v^4}$

$\mathrm{Cos}(at)$	$\dfrac{v^4}{1+a^2v^4}$
$\sinh(at)$	$\dfrac{av^4}{1-a^2v^4}$
$\cosh(at)$	$\dfrac{v^2}{1-a^2v^4}$

جدول 2: التحويل التكاملي العكسي

$\mathcal{P}(v)$	$\mathcal{T}^{-1}\{\mathcal{P}(v)\} = f(t)$
v^2	1
v^4	t
$n!\,v^{2(n+1)}$	t^n
$\dfrac{v^2}{1-av^2}$	e^{at}
$\dfrac{av^4}{1+a^2v^4}$	$\sin(at)$
$\dfrac{v^4}{1+a^2v^4}$	$\mathrm{Cos}(at)$
$\dfrac{av^4}{1-a^2v^4}$	$\sinh(at)$
$\dfrac{v^2}{1-a^2v^4}$	$\cosh(at)$

3. التحويل التكاملي الجديد لبعض المشتقات:[8]

لتكن $f(t)$ دالة و $\mathcal{T}\{f(t)\} = \mathcal{P}(v)$ فإن التحويل التكاملي الجديد للمشتقات يكون على الصورة التالية:

$$\mathcal{T}\{f'(t)\} = \frac{1}{v^2}\mathcal{P}(v) - f(0) \qquad (1)$$

$$\mathcal{T}\{f''(t)\} = \frac{1}{v^4}\mathcal{P}(v) - \frac{1}{v^2}f(0) - f'(0) \qquad (2)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{T}\{f^{(n)}(t)\} = \frac{1}{v^{2n}}\mathcal{P}(v) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{v^{2n-2k-2}}f^{(k)}(0) \qquad (3)$$

4. التحويل التكاملي الجديد لـ $tf(t)$ و $t^2f(t)$ و $t^3f(t)$:

لتكن $f(t)$ دالة و $\mathcal{T}\{f(t)\} = \mathcal{P}(v)$ فإن:

i. $\mathcal{T}\{tf(t)\} = \frac{v^3}{2}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v)$.

ii. $\mathcal{T}\{t^2f(t)\} = \frac{3v^5}{4}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) + \frac{v^6}{4}\frac{d^2}{dv^2}\mathcal{P}(v)$.

iii. $\mathcal{T}\{t^3f(t)\} = \frac{15v^7}{8}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) + \frac{9v^8}{8}\frac{d^2}{dv^2}\mathcal{P}(v) + \frac{v^9}{8}\frac{d^3}{dv^3}\mathcal{P}(v)$.

البرهان:

i. من تعريف التحويل التكاملي الجديد نجد أن

$$\mathcal{T}\{f(t)\} = \mathcal{P}(v) = \int_0^\infty f(t)e^{\frac{-t}{v^2}}\,dt$$

باشتقاق المعادلة السابقة بالنسبة إلى v نتحصل على

$$\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) = \frac{2}{v^3}\int_0^\infty tf(t)e^{\frac{-t}{v^2}}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) = \frac{2}{v^3}\mathcal{T}\{tf(t)\}$$

بإعادة ترتيب المعادلة السابقة

$$\mathcal{T}\{tf(t)\} = \frac{v^3}{2}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) \qquad (4)$$

ii. لإيجاد $\mathcal{T}\{t^2f(t)\}$ نستبدل $f(t)$ في المعادلة (4) بـ $tf(t)$

$$\mathcal{T}\{t^2f(t)\} = \frac{v^3}{2}\frac{d}{dv}\mathcal{T}\{tf(t)\}$$

بالتعويض في المعادلة السابقة عن $\mathcal{T}\{tf(t)\}$ الموضحة في المعادلة (4)، نحصل على

$$\mathcal{T}\{t^2f(t)\} = \frac{v^3}{2}\frac{d}{dv}\left(\frac{v^3}{2}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v)\right)$$

هذا يؤدي إلى أن

$$\mathcal{T}\{t^2f(t)\} = \frac{3v^5}{4}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) + \frac{v^6}{4}\frac{d^2}{dv^2}\mathcal{P}(v) \qquad (5)$$

iii. لإيجاد $\mathcal{T}\{t^3f(t)\}$ نستبدل $f(t)$ في المعادلة (4) بـ $t^2f(t)$، ومن ثم نعوض عن $t^2f(t)$ من المعادلة (5)، وأخير نستكمل الخطوات كما هو موضح في الفقرة السابقة.

ملاحظة: لإيجاد $\mathcal{T}\{t^nf(t)\}$ حيث $n \geq 2$ فإننا نتبع ذات الأسلوب الموضح في الفقرتين السابقتين، ولتسهيل يمكن استخدام البرنامج (1) الموضح في الملحق.

5. التحويل التكاملي الجديد لـ $tf'(t)$ و $t^2f'(t)$ و $t^3f'(t)$:

يكون على الصورة التالية:

i. $\mathcal{T}\{tf'(t)\} = \frac{v}{2}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) - \mathcal{P}(v)$.

ii. $\mathcal{T}\{t^2f'(t)\} = \frac{v^4}{4}\frac{d^2}{dv^2}\mathcal{P}(v) - \frac{v^3}{4}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v)$.

iii. $\mathcal{T}\{t^3f'(t)\} = \frac{v^7}{8}\frac{d^3}{dv^3}\mathcal{P}(v) + \frac{3v^6}{8}\frac{d^2}{dv^2}\mathcal{P}(v) - \frac{3v^5}{8}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v)$

البرهان:

i. للإيجاد $\mathcal{T}\{tf'(t)\}$ نستبدل $f(t)$ في المعادلة (4) بـ $f'(t)$

$$\mathcal{T}\{tf'(t)\} = \frac{v^3}{2}\frac{d}{dv}\mathcal{T}\{f'(t)\}$$

نعوض في المعادلة السابقة عن $\mathcal{T}\{f'(t)\}$ (الموضحة في المعادلة (1))

$$\mathcal{T}\{tf'(t)\} = \frac{v^3}{2}\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{v^2}\mathcal{P}(v) - f(0)\right)$$

بالتالي

$$\mathcal{T}\{tf'(t)\} = \frac{v}{2}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) - \mathcal{P}(v) - \frac{v^3}{2}\frac{d}{dv}f(0)$$

حيث $\frac{d}{dv}f(0) = 0$، فإن المعادلة السابقة تكون على الصورة

$$\mathcal{T}\{tf'(t)\} = \frac{v}{2}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) - \mathcal{P}(v) \qquad (6)$$

ii. باستبدال $f(t)$ في المعادلة (4) بـ $tf'(t)$ نتحصل على

$$\mathcal{T}\{t^2f'(t)\} = \frac{v^3}{2}\frac{d}{dv}\mathcal{T}\{tf'(t)\}$$

من المعادلة (6) نعوض عن $\mathcal{T}\{tf'(t)\}$ في المعادلة السابقة

$$\mathcal{T}\{t^2f'(t)\} = \frac{v^3}{2}\frac{d}{dv}\left(\frac{v}{2}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) - \mathcal{P}(v)\right)$$

أي أن

$$\mathcal{T}\{t^2f'(t)\} = \frac{v^4}{4}\frac{d^2}{dv^2}\mathcal{P}(v) - \frac{v^3}{4}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) \qquad (7)$$

iii. يتم البرهان بنفس الأسوب الموضح في الفقرات السابقة، كما يمكن استخدام البرنامج (2) الموضح في الملحق لتسهيل عملية إيجاد التحويل التكاملي الجديد لـ $t^nf'(t)$.

كذلك يمكن إيجاد كل من

$$\mathcal{T}\{tf''(t)\} = \frac{1}{2v}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) - \frac{2}{v^2}\mathcal{P}(v) + f(0)$$

$$\mathcal{T}\{t^2f''(t)\} = \frac{v^2}{4}\frac{d^2}{dv^2}\mathcal{P}(v) - \frac{5v}{4}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) + 2\mathcal{P}(v)$$

بإتباع الخطوات السابقة أو استخدام البرنامج (3) الموضح في الملحق.

ملاحظة: لإيجاد $\mathcal{T}\{t^nf^m(t)\}$ حيث $n,m \in \mathbb{N}$ فإننا نتبع ذات الأسلوب الموضح في الفقرات السابقة.

6. تحويل لابلاس:

في هذا القسم نوضح تعريف تحويل لابلاس وتطبيقه على الدوال المستخدمة في هذا البحث.

يرمز لتحويل لابلاس بالعامل $\mathcal{L}\{.\}$ ويعرف على الصورة:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

الجدول التالي يوضح تطبيق تحويل لابلاس على بعض الدوال المستخدمة

جدول 3: تحويل لابلاس

$function$	$\mathcal{L}\{function\}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
$tf'(t)$	$-s\frac{d}{ds}F(s) - F(s)$
$t^2 f'(t)$	$s\frac{d^2}{ds^2}F(s) + 2\frac{d}{ds}F(s)$
$tf''(t)$	$-s^2\frac{d}{ds}F(s) - 2sF(s) + f(0)$
$t^2 f''(t)$	$s^2\frac{d^2}{ds^2}F(s) + 4s\frac{d}{ds}F(s) + 2F(s)$

للمزيد من المعلومات أنظر [2, 12].

7. التطبيقات:

نوضح في هذا القسم تطبيق التحويل التكاملي الجديد على بعض مسائل القيمة الابتدائية.

مثال (1):

لتكن مسألة القيمة الابتدائية على الصورة

$$tu' - 2u = 0; \quad u(0) = 0$$

أولاً نطبق التحويل التكاملي الجديد على المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\mathcal{T}\{tu'\} - 2\mathcal{T}\{u\} = 0$$

أي أن

$$\frac{v}{2}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) - \mathcal{P}(v) - 2\mathcal{P}(v) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) - \frac{6}{v}\mathcal{P}(v) = 0$$

حيث $\mu = v^{-6}$ هو العامل التكاملي للمعادلة السابقة وحلها يكون على الصورة

$$\mathcal{P}(v) = cv^6$$

وبأخذ التحويل العكسي للمعادلة السابقة نتحصل على حل المعادلة التفاضلية المعطاة

$$u(t) = ct^2$$

حيث c ثابت حر.

ثانياً نطبق تحويل لابلاس على المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\mathcal{L}\{tu'\} - 2\mathcal{L}\{u\} = 0$$

أي أن

$$-s\frac{d}{ds}F(s) - F(s) - 2F(s) = 0$$

$$\frac{d}{ds}F(s) + \frac{3}{s}F(s) = 0$$

حيث $\mu = s^3$ هو العامل التكاملي للمعادلة السابقة وحلها يكون على الصورة

$$F(s) = cs^{-3}$$

بأخذ التحويل العكسي للمعادلة السابقة نتحصل على حل المعادلة التفاضلية المعطاة

$$u(t) = ct^2$$

حيث c ثابت حر.

مثال (2):

لتكن مسألة القيمة الابتدائية على الصورة

$$tu'' + (1-2t)u' - 2u = 0; \quad u(0) = 1, \; u'(0) = 2$$

أولاً يتم تطبيق التحويل التكاملي الجديد

$$\mathcal{T}\{tu''\} + \mathcal{T}\{u'\} - 2\mathcal{T}\{tu'\} - 2\mathcal{T}\{u\} = 0$$

هذا يؤدي إلى أن

$$\frac{1}{2v}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) - \frac{2}{v^2}\mathcal{P}(v) + u(0) + \frac{1}{v^2}\mathcal{P}(v) - u(0) - 2\left(\frac{v}{2}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) - \mathcal{P}(v)\right) - 2\mathcal{P}(v) = 0$$

بإعادة ترتيب المعادلة السابقة

$$\left(\frac{1}{2v} - v\right)\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) - \frac{1}{v^2}\mathcal{P}(v) = 0$$

بفصل المعادلة السابقة

$$\frac{d\mathcal{P}}{p} = \frac{2}{v - 2v^3}dv$$

حلها هو

$$\mathcal{P}(v) = \frac{v^2}{1-2v^2} + c$$

وبتطبيق التحويل العكسي نجد أن

$$u(t) = e^{2t} + c$$

ومن الشرط الابتدائي نحصل على

$$u(t) = e^{2t}$$

ثانياً نطبق تحويل لابلاس

$$\mathcal{L}\{tu''\} + \mathcal{L}\{u'\} - 2\mathcal{L}\{tu'\} - 2\mathcal{L}\{u\} = 0$$

أي أن

$$-s^2\frac{d}{ds}F(s) - 2sF(s) + u(0) + sF(s) - u(0) - 2\left(-s\frac{d}{ds}F(s) - F(s)\right) - 2F(s) = 0$$

بإعادة ترتيب المعادلة السابقة

$$(2s - s^2)\frac{d}{ds}F(s) - sF(s) = 0$$

يمكن فصل المعادلة السابقة على الصورة

$$\frac{dF}{F(s)} = \frac{sds}{2s - s^2}$$

بالتكامل نجد ان

$$F(s) = c(2-s)^{-1}$$

وبإجراء التحويل العكسي نحصل على

$$u(t) = ce^{2t}$$

وبالتعويض يالشرط الابتدائي نجد أن $c = 1$، أي أن حل المسألة يكون على الصورة

$$u(t) = e^{2t}$$

مثال (3):

لتكن مسألة القيمة الابتدائية

$$t^2u'' - tu' + u = 5; \quad u(0) = 5, \; u'(0) = 3$$

أولاً نطبق التحويل التكاملي الجديد على المعادلة التفاضلية فنحصل على المعادلة التالية

$$\frac{v^4}{4}\frac{d^2}{dv^2}\mathcal{P}(v) - \frac{5v}{4}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) + 2\mathcal{P}(v) - \left(\frac{v}{2}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) - \mathcal{P}(v)\right) + \mathcal{P}(v) = 5v^2$$

بإعادة ترتيب المعادلة السابقة نتحصل على

$$v^2\frac{d^2}{dv^2}\mathcal{P}(v) - 7v\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) + 16\mathcal{P}(v) = 20v^2 \qquad (7)$$

وهي معادلة كوشي-أويلر التفاضلية، نفرض أن $N = \mathcal{P}(v)$ و $v = e^x$ أي أن $x = \ln(v)$، وهذا يؤدي إلى أن

$$\frac{d}{dv}N = \frac{dN}{dx}\frac{1}{v} = \frac{dN}{dx}e^{-x}$$
$$\frac{d^2}{dv^2}N = \left(\frac{d^2N}{dx^2} - \frac{dN}{dx}\right)e^{-2x}$$

بالتعويض في المعادلة (7)

$$e^{2x}\left(\left(\frac{d^2N}{dx^2} - \frac{dN}{dx}\right)e^{-2x}\right) - 7e^x\left(\frac{dN}{dx}e^{-x}\right) + 16\,N = 20e^{2x}$$

بإعادة ترتيب المعادلة السابقة

$$\frac{d^2N}{dx^2} - 8\frac{dN}{dx} + 16N = 20e^{2x} \qquad (8)$$

حل المعادلة السابقة

$$N_g = N_c + N_p = c_1v^4 + c_2v^4\ln(v) + 5v^2$$

ولكي يكون $y(0)$ محدود يجب أن تكون $c_2 = 0$ أي أن

$$\mathcal{P}(v) = N_g = c_1v^4 + 5v^2$$

بتطبيق التحويل العكسي نتحصل على

$$u(t) = c_1t + 5$$

من الشروط الابتدائية نجد أن

$$u(t) = 3t + 5$$

ثانياً نطبق تحويل لابلاس

$$\mathcal{L}\{t^2u''\} - \mathcal{L}\{tu'\} + \mathcal{L}\{u\} = 5$$

أي أن

$$s^2\frac{d^2}{ds^2}F(s) + 4s\frac{d}{ds}F(s) + 2F(s) + s\frac{d}{ds}F(s) + F(s) + F(s) = \frac{5}{s}$$

بتجميع المعادلة السابقة نتحصل على

$$s^2\frac{d^2}{ds^2}F(s) + 5s\frac{d}{ds}F(s) + 4F(s) = \frac{5}{s} \qquad (9)$$

لحل المعادلة نفرض أن $N = F(s)$ و $s = e^x$ أي أن $x = \ln(s)$، بالتالي فإن

$$\frac{d}{ds}N = \frac{dN}{dx}\frac{1}{s} = \frac{dN}{dx}e^{-x}$$
$$\frac{d^2}{ds^2}N = \left(\frac{d^2N}{dx^2} - \frac{dN}{dx}\right)e^{-2x}$$

بالتعويض في المعادلة (9) نجد أن

$$\frac{d^2N}{dx^2} + 4\frac{dN}{dx} + 4N = 5e^{-x}$$

المعادلة السابقة حلها يكون على الصورة

$$N_g = N_c + N_p = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + 5e^{-x}$$

بالتعويض عن x و N نجد أن

$$F(s) = c_1s^{-2} + c_2s^{-2}\ln(s) + \frac{5}{s}$$

ولكي يكون $y(0)$ محدود نضع $c_2 = 0$ أي أن

$$F(s) = c_1s^{-1} + \frac{5}{s}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد ان

$$u(t) = c_1t + 5$$

من الشروط الابتدائية نجد أن

$$u(t) = 3t + 5$$

مثال (4):

إذا كان

$$tu'' - u' = t^2;\;\; u(0) = 0,\;\; u'(0) = 0$$

أولاً نطبق التحويل التكاملي الجديد فنتحصل على

$$\frac{1}{2v}\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) - \frac{2}{v^2}\mathcal{P}(v) + u(0) - \left(\frac{1}{v^2}\mathcal{P}(v) - u(0)\right) = 2v^6$$

بالتعويض عن الشرط الابتدائي $u(0) = 0$ في المعادلة السابقة وتجميع الحدود نجد ان

$$\frac{d}{dv}\mathcal{P}(v) - \frac{6}{v}\mathcal{P}(v) = 4v^7$$

يمكن حل المعادلة السابقة باستخدام العامل التكاملي $\mu = v^{-6}$ لنتحصل على

$$\mathcal{P}(v) = 2v^8 + c$$

وبأخذ التحويل العكسي نجد أن

$$u(t) = \frac{1}{3}t^3 + ct^2$$

حيث c ثابت حر.

ثانياً نطبق تحويل لابلاس

$$\mathcal{L}\{tu''\} - \mathcal{L}\{u'\} = t^2$$

أي أن

$$-2sF(s) - s^2\frac{d}{ds}F(s) + u(0) - sF(s) + u(0) = \frac{2}{s^3}$$

بتجميع المعادلة السابقة والتعويض بالشرط الابتدائي $u(0) = 0$ نجد أن

$$\frac{d}{ds}F(s) + \frac{3}{s}F(s) = \frac{-2}{s^5}$$

باستخدام العامل التكاملي $\mu = v^3$ نتحصل على حل المعادلة السابقة

$$F(s) = \frac{2}{s^4} + \frac{c}{s^3}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد أن

$$u(t) = \frac{1}{3}t^3 + ct^2$$

حيث c ثابت حر.

8. النتائج

نستنتج من خلال هذه الدراسة أن التحويل التكاملي الجديد لا يقتصر على حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية ذات العوامل الثابتة، بل يمكن تطبيقه أيضاً على المعادلات التفاضلية العادية الخطية ذات معاملات متغيرة مما يجعله أداة فعالة لإيجاد الحلول التحليلية لمجموعة واسعة من المسائل، كذلك نجد أن دالة النواة في هذا التحويل قد تبسط العمليات الحسابية في إيجاد حل المعادلة التفاضلية العادية وفقاً لطبيعة المسألة المدروسة، ويمكن مستقبلاً دراسة التحويل التكاملي الجديد في حل أنظمة المعادلات التفاضلية العادية والمعادلات التفاضلية الجزئية.

9. قائمة المراجع

[1]- N. O¨ zdogˇan, "Applications of mohand transform," Journal of Innovative Science and Engineering, vol. 8, no. 1, pp. 18–24, 2024.

[2]- D. Verma, "Applications of laplace transformation for solving various differential equations with variable coefficients," International Journal for Innovative Research in Science & Technology, vol. 4, no. 11, pp. 124–127, 2018.

[3]- H. Z. Rashdi, "Using anuj transform to solve ordinary differential equations with variable coefficients," Scientific

Journal for Faculty of Science-Sirte University, vol. 2, no. 1, pp. 38–42, 2022.

[4]- A. Belafhal, R. El Aitouni, and T. Usman, “Unification of integral transforms and their applications,” Partial Differential Equations in Applied Mathematics, vol. 10, p. 100695, 2024.

[5]- A. Kamal and H. Sedeeg, “The new integral transform kamal transform,” Advances in Theoretical and Applied Mathematics, vol. 11, no. 4, pp. 451–458, 2016.

[6]- R. Gupta, R. Gupta, and D. Verma, “Propounding a new integral transform: Gupta transform with applications in science and engineering,” International Journal of Scientific Research in Research Paper Multidisciplinary Studies, vol. 6, no. 3, pp. 14–19, 2020.

[7]- E. M. Xhaferraj, “The new integral transform: ”ne transform” and its applications,” European Journal of Formal Sciences and Engineering, vol. 6, no. 1, pp. 22–34, 2023.

[8]- R. D. Mhase, A. R. Fulari, S. A. Tarate, and H. N. Shaikh, “A new integral transform and its applications,” International Journal of Scientific Research in Science and Technology, vol. 11, no. 19, pp. 424–442, 2024.

[9]- S. Aggarwal, N. Sharma, R. Chauhan, A. R. Gupta, and A. Khandelwal, “A new application of mahgoub transform for solving linear ordinary differential equations with variable coefficients,” Journal of Computer and Mathematical Sciences, vol. 9, no. 6, pp. 520–525, 2018.

[10]- M. E. H. Attaweel and H. A. A. Almassry, “A new application of sawi transform for solving volterra integral equations and volterra integrodifferential equations,” The Libyan Journal of Science, vol. 22, no. 1, pp. 64–77, 2019.

[11]- A. Kumar, S. Bansal, and S. Aggarwal, “A new novel integral transform “anuj transform” with application,” Design Engineering, vol. 9, pp. 12741 – 12751, 2021.

[12]- W. Guo, “The laplace transform as an alternative general method for solving linear ordinary differential equations,” STEM Education, vol. 1, no. 4, pp. 309–329, 2021.

[13]- T. G. Thange and S. M. Chhatraband, “New general integral transform on time scales,” Journal of Mathematical Modeling, vol. 12, no. 4, pp. 655–669, 2024.

[14]- M. M. A. Mahgoub, “The new integral transform “mohand transform”,” Advances in Theoretical and Applied Mathematics, vol. 12, no. 2, pp. 113–120, 2017.

[15]- I. O. Saud, E. A. Kuffi, and S. H. Talib, “Emad-israa transform a new integral transform of two parameters with applications,” BIO Web of Conferences, vol. 97, p. 00138, 2024.

[16]- G. K. Watugala, “Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems,” Integrated Education, vol. 24, no. 1, pp. 35–43, 1993.

[17]- Z. H. Khan and W. A. Khan, “N-transform properties and applications,” Nust Journal of Engineering Sciences, vol. 1, no. 1, pp. 127–133, 2008.

10. الملحق

لتسهيل إيجاد التحويل التكاملي الجديد لبعض الدوال استخدمنا برنامج الماتلاب في كتابة برامج تقوم بإجراء عملية التحويل.

برنامج (1):

يستخدم هذا البرنامج لإيجاد التحويل التكاملي الجديد لدوال على الصورة $t^n f(t)$.

```
clc
clear
syms f(t) p(v)
n=3;                    % t^n
m=(v^3/2)*diff(p,v);
for i=1:n-1
m=expand((v^3/2)*diff(m,v));
end
fprintf('{t^%d*f(t)}=',n)
disp(m)
```

لاحظ أننا وضعنا $n = 3$ لإيجاد التحويل التكاملي لـ $t^3 f(t)$، ويتم تغييرها حسب الحاجة.

برنامج (2):

يستخدم هذا البرنامج لإيجاد التحويل التكاملي الجديد لدوال على الصورة $t^n f'(t)$.

```
clc
clear
syms x v p(v) f(v)
n=3;                    % t^n
m=(1/v^2)*p(v)-f(v);
for i=1:n
m=expand((v^3/2)*diff(m,v));
end
m=subs(m,f(v),f(0));
fprintf('{t^%d*df(t)}=',n)
disp(m)
```

قمنا بوضع $n = 3$ لإيجاد التحويل التكاملي لـ $t^3 f'(t)$، ويتم تغييرها حسب الحاجة، وعند تطبيق البرنامج نتحصل على

```
{t^3*df(t)}=(3*v^6*diff(p(v), v, v))/8 + (v^7*diff(p(v), v, v, v))/8 - (3*v^5*diff(p(v), v))/8
```

البرنامج (3):

يستخدم هذا البرنامج لإيجاد التحويل التكاملي الجديد لدوال على الصورة $t^n f''(t)$.

```
clc
clear
syms x v p(v) f(v) df(v)
n=2;                    % t^n
m=(1/v^4)*p(v)-(1/v^2)*f(v)-df(v);
for i=1:n
m=expand((v^3/2)*diff(m,v));
end
m=subs(m,f(v),f(0));
m=subs(m,df(v),df(0));
fprintf('{t^%d*d^2f(t)}=',n)
disp(m)
```

قمنا بوضع $n = 2$ لإيجاد التحويل التكاملي لـ $t^2 f''(t)$، ويتم تغييرها حسب الحاجة، وعند تطبيق البرنامج نتحصل على

```
{t^2*d^2f(t)}=2*p(v) + (v^2*diff(p(v), v, v))/4 - (5*v*diff(p(v), v))/4
```